CAPÍTULO VII
TOLSTOI Y LA TORTUGA

[En Inciarte, F., *Tiempo, sustancia, lenguaje. Ensayos de metafísica*, ed. L. Flamarique, Eunsa, Pamplona, 2004]

La historia de las paradojas de Zenón desde entonces hasta ahora se puede resumir en dos posiciones o posturas opuestas. Una es la del mismo Zenón, otra es la de Aristóteles. Con frecuencia se dice que el cálculo infinitesimal ha introducido una tercera postura. Se considera, además, que esta postura es intermedia entre las dos primeras. Por una parte, el cálculo infinitesimal opera con el infinito actual, con el cual ya parece haber operado Zenón; por otra parte, el cálculo infinitesimal –ésta es la creencia más extendida– ha venido a resolver las aporías que Zenón no quería y Aristóteles no podía resolver. Pero por extendida que esté esta opinión, no faltan voces según las cuales en la resolución de las aporías no se ha dado ningún paso adelante desde los tiempos de Aristóteles. En ese caso, el cálculo infinitesimal, en contra de lo que se dice a menudo, no habría traído ningún adelanto, y la referencia a él en este contexto no pasaría de ser un caso más de *asylum ignorantiae*, de repetición mecánica de cosas dichas una y otra vez pero no demostradas previamente. Antes de examinar si esto era así ya en el caso de Tolstoi, quisiera delinear brevemente la postura de Aristóteles frente a las aporías, ya que Tolstoi no se refiere a él sino sólo a Zenón y al cálculo infinitesimal.

Una cosa que los comentaristas –sobre todo matemáticos– pasan con facilidad por alto es que Aristóteles no pretendió resolverlas, y esto por la sencilla razón de que las consideraba mal planteadas: ni aptas ni dignas de solución. Su postura puede parecer de entrada un tanto altiva; pero las razones de Aristóteles para adoptarla –independientemente de si son concluyentes o no– no dejan por eso de ser dignas de consideración. Esas razones son fundamentalmente dos, que, a su vez, se pueden reducir a una: al hecho de que tanto el movimiento como la extensión y el tiempo son algo continuo, mientras que Zenón los trata como algo discreto. Tal circunstancia se aplica tanto al trecho que un móvil –Aquiles, la tortuga o lo que sea– tenga que recorrer, como al móvil mismo y al tiempo que necesite para hacerlo. De ahí se derivan las dos razones a que acabamos de aludir: ni el móvil se puede reducir a un punto ni el trecho o el tiempo se pueden dividir en puntos como si se compusieran de ellos.

La más importante es esta última razón. A primera vista, se podría pensar que sólo se aplica a la paradoja de la flecha, la cual parte de que para recorrer cualquier trecho (y lo mismo se podría pensar del tiempo para hacerlo) la flecha tiene que recorrer una serie de puntos en lo cuales está parada. En cambio, las dos paradojas que la preceden no parten de que el móvil esté parado en cada punto: eso es en todo caso la conclusión a que llegan. De donde parten es más bien de la divisibilidad del trayecto (o del tiempo requerido) en partes cada vez más pequeñas. Aquí hasta ahora no se ha hablado de puntos.

Planteada la cuestión en estos términos, la pregunta inmediata es si la división progresiva, que acabamos de llamar "divisibilidad", llega a su término o no. Si sí, entonces ya tenemos los puntos que creíamos haber podido soslayar y la divisibilidad se resuelve en una división de puntos infinitos: el infinito potencial en un infinito actual; con otras palabras, el trayecto se compone de una infinidad de puntos, puesto que tanto los trayectos (o tiempos) intermedios como las ventajas que Aquiles lleva sucesivamente a la tortuga, se resuelven en elementos (puntos, instantes) inextensos en los que el movimiento queda congelado o parado; la situación no sería, al final, diferente a la de (la paradoja de) la flecha. En cambio, si la divisibilidad no se resolviera en una división definitiva, entonces esos trayectos intermedios no quedarían eliminados; serían, simplemente, cada vez más pequeños sin que, a partir de ellos, se pudiera llegar jamás a puntos indivisibles. La situación sería diferente de la de (la paradoja de) la flecha: la línea (el trayecto, el movimiento, el tiempo) no habría quedado resuelta en puntos como si constara de ellos.

Sin embargo, la diferencia entre las dos primeras paradojas (la de la división en mitades cada vez menores y la de adición de partes o ventajas también cada vez menores pero en proporción constante) y la de la flecha no es tan grande como esta última consideración sugiere. Entre trayecto y trayecto, por pequeños que éstos se tomen, habría división y no mera divisibilidad, y con la división habría también puntos. En ese caso, Aristóteles no habría conseguido demostrar que, al plantear el problema en términos de puntos, Zenón lo hubiera viciado de antemano sustituyendo a la continuidad sin más la discreción y eliminando así la cuestión en litigio en vez de explicarla. El móvil –flecha, Aquiles o lo que fuera– quedaría detenido, si no en una infinidad de puntos, como según Zenón, por lo menos sí en cada uno de los puntos por los que el trayecto (o el tiempo) hubiera quedado dividido... o en el primero con el que el móvil se tropezara como con un obstáculo insuperable.

Mirado con más detenimiento, esto, sin embargo, no habla en contra de la acusación de Aristóteles contra Zenón que, según lo dicho, caería bajo el título de una de las falacias de que Aristóteles trata en sus *Refutaciones sofísticas*: la de la *ignorantia elenchi* consistente en sustituir un tema por otro o, como a veces se dice, en "cambiar el supuesto"; sería como si la refutación zenoniana del movimiento "le resbalara" a éste. La razón es que, si bien la divisibilidad de que habla Aristóteles es compatible con una división parcial en el sentido de que nunca acaba, sin embargo, la división en cuestión se realiza en cada caso única y exclusivamente en la mente, pero no en la realidad del móvil en movimiento. Si se realizara ahí, es decir, si –no ya lo dividiéramos nosotros sino que– él mismo, el movimiento mismo, estuviera dividido por un número cualquiera –finito o infinito– de puntos, entonces ya no se trataría de *un* movimiento, como tampoco se trataría de *un* trayecto (por ejemplo, del trayecto que recorre Aquiles hasta alcanzar a la tortuga). Y lo mismo habría que decir del tiempo. La continuidad es lo que se trata de explicar sin eliminarla de antemano, pero queda eliminada de antemano tan pronto como consideramos algo (trayecto, punto, instante o lo que sea) que es uno como dos. Por ese procedimiento ya hemos pasado subrepticiamente de la continuidad a la contigüidad, de la unidad a la pluralidad. Es verdad que estamos dando constantemente ese paso en cuanto nos ponemos a hacer nuestros cálculos –matemáticos o no–, sobre las cosas, a cavilar sobre ellas y, por cierto, no sólo cuando reflexionamos sobre las paradojas de Zenón. Pero lo que no está permitido es proyectar sin más ese ineludible modo nuestro de reflexionar sobre la realidad a ella misma. Con esto no está aún dicho que la realidad sea continua y el pensamiento discreto sino que la continuidad o la discontinuidad del pensamiento no tienen por qué coincidir con el de la realidad. ¿Es que entonces no podemos conocer ésta? Tampoco esto está dicho con eso sino únicamente que hay que procurar distinguir lo que en el conocimiento va por cuenta o depende de la realidad y lo que depende o va por cuenta del conocimiento. Y decir que es imposible discernir una cosa de otra es negar la distinción que hace Aristóteles entre la metafísica (como ciencia del *ens ut ens*) y las demás ciencias (que tratan del *ens ut verum*). Para él, sólo la primera es capaz de dar con las estructuras mínimas pero imprescindibles para que la realidad sea real, sin proyectar sobre ella lo que depende de nuestro modo de conocer. Todo esto no quiere decir que Aristóteles confíe más en los sentidos que ven que en la razón que no ve. Su postura es más bien la del que considera que se puede cruzar de brazos ante contestaciones a preguntas no bien planteadas: antes de refutar esas contestaciones, hay que plantear bien las preguntas. En esto su procedimiento es el mismo que utiliza en el elenco no para demostrar, pero sí para defender el principio de no-contradicción contra ataques viciados de raíz. Tampoco ahí refuta a su oponente. Más bien le anima a plantear sus objeciones sobre una nueva y mejor base. Mientras tanto él no necesita hacer nada.

Una última observación antes de pasar a Tolstoi. La distinción entre el trayecto, tiempo o movimiento continuo, tal y como debe ser si trayecto, tiempo o movimiento han de poder ser reales, por una parte, y las discontinuidades que nuestra mente (matemática o del tipo que sea) tenga que introducir para poder analizar esos fenómenos, por otra, no quiere decir que –para quedarnos en el problema del tiempo– el tiempo real sea el tiempo extendido entre pasado y futuro. Más bien quiere decir lo contrario: que el tiempo real no se compone ni de puntos finitos o infinitos ni de trozos de tiempo finitos o infinitos divididos realmente entre sí por otros tantos puntos reales. Aparte de que semejantes puntos –o, en general, puntos sin más– no pueden ser nunca reales, la conclusión que hay que sacar de las consideraciones anteriores para exponer la posición de Aristóteles con relación a las paradojas de Zenón, es justamente que el tiempo (real, metafísico) no consta de una sucesión de puntos (ahora y ahora y ahora) sino de uno solo; que hay sólo un ahora real y que la sucesión o, sencillamente, la multiplicidad de ahoras es producto de la mente analizante, aunque no por eso algo falso sino precisamente uno de los muchos aspectos del *ens ut verum* (pero no *ut ens*). Es lo que en otras ocasiones ya nos apareció como el punto omnipresente (“*ubiquitous point*”) de la “línea” (temporal o, incluso, espacial). Con esto paso ya directamente a Tolstoi.

Al final de *Guerra y Paz* se lee: “Como Voltaire en sus tiempos, los defensores sin título de la ley de la necesidad la emplean como arma contra la religión; cuando la verdad es que, lo mismo que las leyes de Copérnico en astronomía, las leyes de la necesidad en la historia no sólo no destruyen, sino que consolidan incluso el terreno en que se asientan las instituciones del gobierno y de la Iglesia.

Igual que en otro tiempo con respecto a la astronomía, ahora, en lo referente a la historia, toda la controversia se funda en el reconocimiento o no reconocimiento de la unidad absoluta que sirve de medida a los fenómenos sensibles. Esa unidad, en la astronomía, era la inmovilidad de la tierra; en la historia es la independencia del universo, la libertad. Para la astronomía, la dificultad en el reconocimiento de que la tierra se mueve consistía en que había que renunciar a la sensación directa de que nuestro planeta permanece inmóvil y de que los demás astros se mueven; igualmente, si en la historia resulta difícil admitir la sumisión del individuo a las leyes de la necesidad, del espacio, del tiempo y de las causas, es porque se debe renunciar al sentimiento directo de independencia que tiene el propio individuo.

Pero así como en la astronomía la nueva opinión afirmaba: “Es verdad que no advertimos el movimiento de la tierra, pero, admitiendo su inmovilidad, desembocamos en el absurdo, en tanto que, admitiendo su movimiento, aunque no lo advertimos, llegamos a una ley”, así, en la historia, la nueva corriente dice: “Es verdad que no sentimos nuestra dependencia; pero admitiendo la libertad, llegamos al absurdo, mientras que si admitimos nuestra dependencia con respecto al mundo exterior, al tiempo y a las causas, llegamos a una ley”. En el primer caso había que renunciar a la conciencia de una inmovilidad en el espacio y admitir un movimiento que no sentíamos; en el caso presente es necesario renunciar a una libertad de la que tenemos conciencia y admitir una dependencia que no sentimos”[1].

Después de todo, atenerse estrictamente a la sucesión temporal en una narración es siempre una ficción. De un modo o de otro, la narración da saltos. Sólo no los daría si consiguiera ir al paso del instante presente. Pero entonces –en nuestro caso– sólo podríamos contar que estamos escribiendo; ni tan siquiera lo que estamos escribiendo, que ya no podría ser nada. Fuera de esa utopía, de esa imposibilidad, siempre tenemos que se-

1. *Guerra y Paz*, Planeta, Barcelona, 1988, pp. 1461-62.

leccionar más o menos arbitrariamente un trecho más o menos largo de tiempo; es decir, tenemos que disecar más o menos la vida (si se quiere, la inagotable fuente de la vida que aquí es el tiempo real, el instante metafísico) y convertirla en sucesos. Sólo por ese procedimiento se pueden formular leyes históricas más o menos seguras, cuanto más amplias y generales más seguras y menos reales.

Es lo que hace la ciencia histórica según Tolstoi. La libertad sólo se da en el instante, pero es inarticulable. En cuanto que empezamos a abstraer, nos alejamos cada vez más de la originariedad. Para decirlo al gusto de Tolstoi mismo: los supuestos héroes de la historia, sus supuestos creadores y promotores, los héroes de Carlyle, son sólo un producto de la memoria histórica, que *si se quiere convertir en ciencia tiene que darse cuenta de que los sucesos históricos son la integración de actos infinitesimalmente minúsculos que nada tienen que ver con la grandeza de esos supuestos héroes*. En ese sentido, esos héroes están tan sujetos a la astucia de la razón como los individuos de la historia universal hegelianos ("*weltgeschichtliche Individuen*"). En el fondo, esos héroes son otro producto más de la memoria, esta vez claramente ideologizada. Y lo que intenta la vanguardia artística del siglo XX, de la que habla Boris Groys –una vez que la relación con la eternidad por descreer de la inmortalidad del alma se ha perdido– es dar con las leyes por las cuales el individuo –ahora por medio del arte, o, en general, de la cultura– consiga por lo menos un lugar en el archivo de la memoria, no de Dios, sino de la humanidad. En este sentido, todo recuerdo escrito, toda escritura del recuerdo, es un producto de la secularización. Y sólo relativizando su importancia –como la de la filosofía propia y ajena y de la cultura en general– cabe –a mi modo de ver relativo también él mismo– esperar zafarse del precipicio (ahora no tanto de la precipitación como) de la demora en el pasado, como si eso fuera lo importante y no el quehacer minúsculo, infinitesimal, de cada día, de cada hora, de cada minuto, de cada segundo… Y si eso es imposible de realizar, es decir de alcanzar en la vida reflexiva de la abstracción, más lo será en la ciencia, por más que ésta, a diferencia de los Michelets, Thiers, etc., tenga en cuenta con Tolstoi esa infinitesimalidad. Lo cual explica que la ciencia que Tolstoi postula sea en realidad novela. En este sentido, la novela es lo más cercano imaginable a la metafísica. Ambas se encuentran, se dan la mano, en el instante único inasible. Dicho de otro modo, ninguna de las dos opera o pretende operar con abstracciones (o ambas pretenden operar sin ellas).

Al principio de la tercera parte Tolstoi escribe: “La inteligencia humana no puede comprender la continuidad absoluta del movimiento. Las leyes de cualquier clase de movimiento no son comprensibles para el hombre sino a condición de que éste examine, separando arbitrariamente, las unidades de que está compuesto. Pero al mismo tiempo, al aislar arbitrariamente y examinar por separado las unidades inseparables del movimiento continuo, se da lugar a la mayoría de los errores humanos. Bien conocido es el sofisma de los antiguos: Aquiles no alcanzará nunca a la tortuga por más que Aquiles camine diez veces más rápido que aquélla. Cuando Aquiles haya recorrido el espacio que le separa de la tortuga, ésta habrá avanzado la décima parte de ese espacio; cuando Aquiles cubra esta décima parte, la tortuga habrá avanzado la centésima parte, y así hasta el infinito. Semejante problema parecía insoluble a los antiguos. Lo absurdo de esa solución (que Aquiles no alcance nunca a la tortuga) provenía sólo del hecho de que se admitiera arbitrariamente la separación de las unidades del movimiento, cuando la verdad es que los movimientos de Aquiles y la tortuga se producen sin discontinuidad alguna.

Tomando unidades de movimiento cada vez más pequeñas, no hacemos sino acercarnos cada vez más a la solución del problema, pero sin llegar a resolverlo nunca. Esto no se obtiene más que admitiendo las magnitudes infinitesimales y su progresión ascendente hasta una décima y sumando esa progresión geométrica. Una nueva rama de las matemáticas, el empleo de los infinitesimales, resuelve actualmente problemas que en otro tiempo parecieron insolubles.

Esta nueva rama, desconocida por los antiguos, aplicada a los problemas del movimiento restablece la condición principal de éste –su continuidad absoluta–, y, de tal manera, corrige el error que la inteligencia humana no puede evitar cuando examina separadamente las unidades del movimiento, en vez de tomar el movimiento continuo.

Lo mismo ocurre exactamente en el análisis de las leyes del desarrollo histórico. El avance de la humanidad, producido por la suma de innúmeras voluntades humanas, se cumple ininterrumpidamente.

La comprensión de las leyes de ese avance es el objeto de la historia. Mas para comprender las leyes del movimiento continuo resultante de todos los actos volitivos de los hombres, la razón humana admite unidades arbitrarias separadas. El primer método histórico consiste en tomar de modo arbitrario una serie de acontecimientos ininterrumpidos y examinarlos separadamente de otros, cuando no hay ni puede haber principio de un acontecimiento, puesto que unos proceden de los otros, sin interrupción. El segundo método consiste en examinar los actos de un hombre, rey o caudillo, como resultantes de las voliciones de los hombres, siendo así que estas resultantes no se expresan nunca de la actividad de un personaje histórico, tomado aisladamente.

La ciencia histórica, en su desarrollo, acepta siempre unidades cada vez más pequeñas para sus investigaciones y, por ese medio, trata de acercarse a la verdad. Mas, por pequeñas que sean las unidades de que se sirve la historia, el hecho de separar una unidad, de admitir el comienzo de un fenómeno cualquiera, de ver expresadas en la actividad de un determinado personaje las voliciones de todos los hombres, es falso ya de por sí.

Bajo el mínimo esfuerzo de la crítica, toda conclusión histórica se desvanece como el polvo, sin dejar rastro, si la crítica escoge como medida de análisis una unidad de tiempo mayor o menor, cosa a la que tiene perfecto derecho, ya que la unidad histórica es siempre arbitraria.

Sólo tomando para nuestra observación la unidad infinitesimal –los diferenciales de la historia, es decir, las aspiraciones uniformes de los hombres– y consiguiendo el arte de integrar (con la unión de las sumas de los infinitesimales) podemos esperar una comprensión de las leyes de la historia"[2].

No siendo un matemático profesional (invento, por otra parte, del burgués siglo XIX), Tolstoi se hace eco de la postura a que me acabo de referir: el cálculo infinitesimal como solución de las aporías. Es verdad que desde entonces, desde la época en que Tolstoi escribió *Guerra y Paz*, hasta ahora se ha trabajado mucho en lo que se llaman fundamentos del cálculo infinitesimal. Pero por lo menos como punto de partida, la referencia a Tolstoi tiene la ventaja de empalmar con las consideraciones anteriores. Como digo, Tolstoi es de los que cree que hubo que esperar al cálculo infinitesimal para resolver las aporías. Y aunque no tiene en absoluto en cuenta –por lo menos explícitamente– a Aristóteles, sin embargo, es plenamente consciente de que por lo menos en el planteamiento zenoniano hay un cambio subrepticio de supuesto.

Tolstoi empieza sus consideraciones afirmando que el intelecto humano es incapaz de captar el movimiento. "Intelecto" se opone aquí a "intuición", y en especial a "intuición sensible". A la intuición sensible le resulta todo menos imposible captar el movimiento, y la intuición sensible

2. *Guerra y Paz*, pp. 990-91.

lo capta, además, como algo continuo. Para ella, las interrupciones del movimiento equivalen a ceses del mismo, como cuando vemos que un móvil se detiene y vuelve a arrancar.

Tolstoi continúa diciendo que para que el intelecto (añado yo: al revés que la intuición) capte el movimiento tiene que seleccionar en ese continuo unidades de movimiento "arbitrariamente". "Arbitrariamente", primero, porque esa selección equivale justamente a interrumpir el movimiento o, lo que es lo mismo, a contravenir la continuidad con que se presenta a la intuición. En ésta –como captación *inmediata* que es; no otra cosa significa "intuición"– es donde se da la realidad del movimiento. "Arbitrariamente", también, porque la unidad que tomemos para medir el movimiento y establecer sus leyes, puede ser mayor o menor. Lo único importante es que tenga una magnitud determinada.

Por fin, Tolstoi señala que tal división arbitraria del movimiento continuo en unidades y trozos discontinuos es responsable "en una amplia proporción" de los errores humanos a través de la historia[3]. Para justificar su acusación, Tolstoi se limita a poner un ejemplo. El ejemplo es el de Aquiles y la tortuga: la serie que representa la distancia (o la ventaja de la tortuga) cada vez menor entre las trayectorias recorridas por ambos sucesivamente se aproxima pero no llega nunca a cero. Así, por ejemplo, si Aquiles es diez veces más veloz que la tortuga (poco es decir), cuando llega al punto de partida de ésta, la tortuga le llevará una ventaja diez veces menor que la ventaja inicial, y al llegar Aquiles a ese otro punto, la ventaja que le llevará la tortuga será cien veces menor que la inicial. Y así sucesivamente, sin que aquél pueda jamás alcanzar a ésta por mínimas que vayan siendo las diferencias entre ambos.

¿Dónde está el error? Y ¿cómo se puede subsanar? Para contestar a la primera pregunta, Tolstoi repite simplemente que "es absurdo" (que está

3. Uno podría pensar: ¿cómo no va a ser así, si eso significa justamente acabar con el movimiento, el cual o bien es algo continuo o no es nada? Sacar esta conclusión sería, sin embargo, algo precipitado. Todo conocimiento intelectual es conceptual y en este sentido discontinuo. Si todos los conceptos estuvieran en una relación de continuidad entre sí, no habría conceptos, porque entonces todos no serían sino uno. Pero el que por lo menos algunos de nuestros conceptos tengan que estar bien definidos (lo que correspondería a las unidades discretas que elijamos para medir el movimiento), eso no quiere decir que tales conceptos tengan que tener en la realidad una perfecta correspondencia en forma de determinaciones igualmente bien definidas. Bien pudiera ser que para hacer ciencia haya que simplificar, abstraer. Pero "abstraer no es engañar". O, para apurar más el paralelismo con el caso del movimiento: aunque –en contra de Hegel– no hubiera ningún concepto que se moviera (en cualquier sentido de la palabra "moverse"), eso no querría decir que el concepto de movimiento no pudiera captarlo.

condenado de antemano al fracaso) el intento de explicar los movimientos relativos de Aquiles y la tortuga, que son continuos, recurriendo a unidades discontinuas, las cuales, además, se toman arbitrariamente. En esto su postura parece coincidir en lo sustancial con la de Aristóteles. Para contestar, en cambio, a la segunda pregunta, se refiere al descubrimiento del cálculo infinitesimal y, en especial, de cantidades infinitamente pequeñas o infinitésimos. “Sólo si admitimos cantidades infinitesimales *en progresión* [decreciente]: *hasta una décima parte* y tomamos [calculamos] la suma de esa progresión geométrica, estamos en disposición de llegar a la solución del problema”.

Aquí las palabras claves son las que acabo de subrayar. ¿Qué quiere decir “hasta una décima parte”? Eso sólo puede querer decir una cosa: que la paradoja desaparece en cuanto desaparece la diferencia *constante* de un décimo entre la trayectoria recorrida en cada caso por Aquiles y la tortuga. Pero entonces, ¿cómo puede seguir siendo constante la proporción entre ambas trayectorias? ¿No es lo que dice Tolstoi –si es que lo dice en el original así– una mera petición de principio? ¿No equivale eso a decir que la paradoja desaparece cuando Aquiles alcanza a la tortuga? Es verdad que Tolstoi añade como otra condición para la solución: “...y se tome la suma de esa proporción geométrica”, con lo cual parece referirse a la integración de los infinitesimales obtenidos previamente por diferenciación. Sin embargo, si la frase anterior no contuviera realmente más que una petición de principio, esa otra frase, por acertada que fuera, quedaría en el aire.

La cuestión fundamental es, por tanto, si Tolstoi –sin presuponer lo que se trata de demostrar– puede afirmar que la ventaja de un décimo que la tortuga lleva siempre a Aquiles es reductible a cero. La contestación a esta pregunta depende de si se acepta o no se acepta la posibilidad de un infinito actual. Que la ventaja de un décimo de la trayectoria recorrida por ambos vaya siendo, en términos absolutos, cada vez más pequeña no basta. Pero eso es lo que ocurriría si la serie se acercara infinitamente a cero sin llegar a cero. Esto es precisamente lo que se entiende por infinito potencial aplicado a un trayecto o línea cualquiera. En el infinito potencial no hay llegada ni, por tanto, alcance posible del adelantado por parte del rezagado. En cambio, en el infinito actual, dado que los trechos cada vez más pequeños se pueden reducir a puntos, la ventaja siempre sobrante queda reducida, a su vez, también a un punto y con ello eliminada. Esto es lo que significa “pasar al límite”: llegar a la meta siempre postpuesta mientras no llegue ese momento. Y esto es lo que significa, supongo yo, el corte de Dedekind: que el trayecto se resuelve por completo en puntos, pero de tal manera que –al revés que en Zenón– su unidad no quede por eso eliminada; que se sigue tratando de *un* solo trayecto y no de muchos, pocos o ninguno de ellos (esto último, es detrás de lo que va o a lo que va Zenón: a hacer ver que el trayecto –continuo– no es nada, como tampoco el movimiento).

Con esto ya entro en terreno movedizo para mí[4]. A reserva de correcciones o adiciones, yo veo por ahora las cosas así: con su corte, Dedekind hace o quiere hacer ver que en una línea hay una auténtica sucesión de puntos; que entre dos puntos no tiene por qué haber siempre otro punto y así indefinidamente, como Aristóteles pretendía. Lo que ocurre es que, primero, para que hubiera una auténtica sucesión de puntos, éstos tendrían que estar en contigüidad unos con otros o, dicho de una manera algo más vulgar, que puntos sucesivos se tendrían que tocar entre sí. Si no, es decir, si estuvieran entre sí en la relación que Aristóteles llama "*ejfexh''*", consistente en que entre dos puntos no habría siempre otros puntos sino otras cosas (en este caso, un segmento de la línea original), entonces habría que preguntar qué pasa con los puntos de esa otra cosa (de ese segmento de la línea original), y el problema resurgiría. Y segundo, lo que ocurre es también que puntos sucesivos en el sentido de contiguos no los puede haber, son imposibles. Y esto, porque, al no tener partes, los puntos contiguos no se podrían "tocar" sólo en parte, con lo cual se identificarían entre sí. Éste es el resumen del argumento que Aristóteles da ya a principios del primer capítulo del libro VI de la *Física* sobre la continuidad (por cierto, es aquí importante consultar la traducción de ese párrafo –231a18-b18– que David Ross pone en su edición traducida y comentada de la *Física* de Aristóteles).

A este argumento se podría objetar que se apoya en el concepto de "tocarse", concepto demasiado burdo (sensible) para poder ser aplicado a puntos. ¿Qué decir a esto?

Aparte de que la objeción parte del presupuesto de que los puntos son algo puramente ideal (que es como interpretamos la objeción de base de

4. Mis mayores dudas se refieren a si, en la cuestión de la continuidad, la moderna matemática clásica considera, igual que Aristóteles, que es imposible que en una línea haya un punto junto a otro. Bertrand Russell critica al respecto a Hegel por haber admitido lo contrario (Cfr. M. WOLFF, *Der Begriff des Widerspruchs*). Pero me extraña mucho que el concepto de infinito de la matemática moderna vaya a coincidir con el de infinito potencial en Aristóteles, que es lo que se tendría que deducir de la crítica de Russell a Hegel. ¿Es posible que Russell no hubiera entendido a Dedekind?

Aristóteles contra Zenón, con lo cual la objeción “dedekindiana” ya sería una concesión a “nuestro” favor); aparte de eso, el hecho de que en griego “contigüidad” se diga “tocarse” (o “tocándose”, “tocado(s)”: *aJptovmenon*) se puede interpretar en dos direcciones opuestas, en dirección a lo (físicamente) real y en dirección a lo (puramente) ideal. En otras palabras, el argumento de Aristóteles seguiría en pie, aunque el concepto de contigüidad no sugiriera ya de por sí, como en griego, el de tocarse. Tampoco en la idealidad los puntos pueden tener partes (ideales). Por definición, los puntos son siempre simples.

Una objeción más seria sería la que pusiera en cuestión que el corte de Dedekind implique contigüidad de los puntos de una línea. Aquí las preguntas (alrededor de la única más general: qué es tal corte) serían: ¿Qué es lo que produce el corte? ¿Un punto? ¿Y qué es lo que eso (punto o lo que sea) produce? ¿Cuál es el resultado del corte? ¿Un intervalo o no? Si no, estaríamos otra vez en las andadas (no habría sucesión de puntos, sino uno sólo). Pero si sí, ¿se puede seguir hablando en ese caso de contigüidad entre los puntos? Si sí, ya estamos en lo mismo. Y si no, ¿no estamos otra vez en las andadas, en el sentido de que el intervalo habría que interpretarlo como el segmento de la línea original, del que ya vimos que no hacía sino retrotraer el problema?

Dejo estas preguntas para volver a Tolstoi y a la relación entre continuidad y libertad. Si las consideraciones anteriores se encuadran en el marco de las antinomias matemáticas kantianas, esta última cuestión atañe más bien a la primera de las antinomias dinámicas kantianas: la relación entre libertad y ley (“legalidad”, “*Gesetzmäßigkeit*”): Tolstoi quería dar con las leyes de la historia, lo cual no coincide exactamente con la realidad –inaccesible– de la historia como *res gestae ut gestae* sino, en todo caso, con la distinta realidad de la historia *ut vera seu cognita*, de la historia como captada por una crónica o una ciencia.

Un nuevo libro sobre el particular (Christian B. Lang/Norbert Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin 1998) empieza con la paradoja de Aquiles y la tortuga. El libro expone, con una claridad mayor de lo que yo hasta ahora había alcanzado a ver, por qué el cálculo infinitesimal resuelve la paradoja. Con su ayuda se puede indicar el punto exacto en que Aquiles alcanza a la tortuga. Al principio, el libro parece cometer una petición de principio, porque los autores se colocan de antemano en un punto fuera del ámbito que analiza Zenón: más allá del punto en que Aquiles tendría que alcanzar (no: haber ya adelantado) a la tortuga. Pero hasta ahí los autores están hablando intuitivamente y no en términos de cálculo infinitesimal. Sin embargo, pronto cambian de punto de vista y se concentran en ese punto preciso del tiempo y del espacio. Según los autores, la cuestión filosófica es si la realidad (del tiempo y del trayecto) se compone de puntos. Aristóteles demuestra que eso (de lo que también parte Zenón) es imposible (en ese caso, el cálculo infinitesimal iría más allá de Zenón –supuesto que éste se colocara en un terreno estrictamente matemático–, pero no más allá de Aristóteles). La cuestión es entonces la de las relaciones entre matemática, física y "realidad". Tal y como yo la veo, el *quid* está en lo que, con una expresión tomada de las antinomías matemáticas de Kant, se puede llamar el todo matemático. Digámoslo así: la matemática parte de que todo está perfectamente determinado (según el principio de *tercio excluso*), pero eso es lo que Kant niega que sea el caso de la realidad fenoménica del mundo (por eso las antinomias matemáticas se sitúan más allá o más acá de la disputa por o a favor del principio de *tercio excluso*). "Realidad fenoménica" significa ahí que el mundo no está plenamente determinado (como lo tendría que estar si fuera cosa en sí). Traducido a nuestro problema del punto en que Zenón alcanza a la tortuga eso significa: el punto del trayecto (o del tiempo) sólo existe en la mente (en la abstracción; no en el *ens ut ens* sino en el *ens ut verum*); en la realidad el punto existe sólo potencialmente: lo podemos trazar en cualquier parte de la línea. Y esto significa, a su vez, que el punto (como real, es decir, como punto o corte meramente potencial) se identifica con el trayecto. A ese resultado ya llegó Aristóteles (ver el "*ubiquitous point*" en el comentario de Hussey al tratado aristotélico del tiempo en la *Física*).